PERSISTANCES D’UN NOMBRE

Persistance

- action de persister, fait de ne pas changer (Le Robert)

- en mathématiques, nombre d’étapes nécessaires pour atteindre un point fixe, lorsqu’on effectue, par itérations successives, une série d’opérations à ce nombre. (Wikipédia)

« Le ciel dure, la terre persiste.
Qu’est-ce-donc qui les fait persister et durer ?
Ils ne vivent point pour eux-mêmes. » **Lao-Tseu**

Séance KFM du 10.4.2025
Chocomath
Blandine Sergent

PERSISTANCE ADDITIVE d'un nombre entier écrit **dans le système décimal**

Calcul du chemin de vie d'Einstein, né le 14.3.1879 → 1+4+3+1+8+7+9 = 33 → 3 + 3 = 6

$N_0 = \sum_i a_{0i}\, 10^i \to \sum_i a_{0i} = N_1 = \sum_i a_{1i}\, 10^i \to \sum_i a_{1i} = N_2 = \sum_i a_{2i}\, 10^i \to \ldots\ldots\ldots \to N_{pa}$

La suite $\{N_n\}$ est une suite d'entiers naturels, strictement décroissante donc elle se fixe à un point N_{pa} entier naturel inférieur ou égal à 9.

N_{pa} : **la racine numérique additive est le point fixe** dans le processus itératif

pa : la persistance additive est le nombre minimal d'étapes menant au point fixe

$\forall$ i, j $N_i \equiv N_j$ (9) ($\equiv$: congru à) ainsi, **N_{pa} est égale au reste de la division de N_0 par 9**.

NO LIMIT pour la persistance additive

La persistance additive est nulle pour les entiers compris entre 0 et 9, qui sont par ailleurs égaux à leur racine numérique additive.

- 10 est le plus petit entier de persistance 1.

- Le plus petit entier de persistance 2 est 19.

- Cherchons à déterminer le plus petit entier de persistance 3 :
  1 ←10 ←19 : déterminons le plus petit nombre dont la somme des chiffres est 19. C'est un nombre dont le deuxième chiffre et les suivants sont égaux à 9. Le quotient entier de 19 par 9 est 2, le reste est 1 : 19 = 2 x 9 +1. 199 est le plus petit nombre de persistance 3.

- 1 ←10 ←19 ← 199 : de même, le plus petit entier de persistance 4 est déterminé par le quotient de 199 par 9. 199 = 9 x 22 + 1. $1\underbrace{9999..99}_{22}$ est le plus petit nombre de persistance 4.

- 1 ←10 ←19 ← 199 ←$1\underbrace{9999..99}_{22}$ ← ….on trouve le plus petit entier de persistance 5 en effectuant la division euclidienne de $1\underbrace{9999..99}_{22}$ par 9. Etc.

On peut en déduire que **La persistance additive n'a pas de limite.**

PERSISTANCE MULTIPLICATIVE d'un nombre entier écrit **dans le système décimal**

On fabrique, à partir d'un entier naturel N_0, la suite obtenue avec le produit des chiffres.
$N_0 = \sum_i a_{0i}\, 10^i \rightarrow \prod_i a_{0i} = N_1 = \sum_i a_{1i}\, 10^i \rightarrow \prod_i a_{1i} = N_2 = \sum_i a_{2i}\, 10^i \rightarrow$………

1er cas : $N_0 \leq 10$. Le processus s'arrête au bout d'une étape.

2ème cas : il existe un indice *i* tel que $a_{0i} = 0$ alors $N_1 = 0$. Le processus s'arrête au bout d'une étape.

Dans les autres cas, la suite $\{N_n\}$ obtenue est une suite d'entiers naturels strictement décroissante.
En effet, $N_0 = \sum_0^n a_{0i}\, 10^i$

$$\sum_0^n a_{0i}\, 10^i > \prod_0^n a_{0i} \Leftrightarrow \sum_0^{n-1} a_{0i}\, 10^i + 10^n a_{0n} > \prod_0^{n-1} a_{0i} \times a_{0n}$$

$$\Leftrightarrow \sum_0^{n-1} a_{0i}\, 10^i + a_{0n}\left(10^n - \prod_0^{n-1} a_{0i}\right) > 0 \text{ qui est vrai.}$$

$\{N_n\}$ a donc un nombre fini d'éléments et un plus petit élément N_{pm} , point fixe, à partir duquel le processus de multiplication des chiffres s'arrête.

N_{pm} est la **racine numérique multiplicative.**
L'indice pm est la persistance multiplicative i.e. le nombre minimal d'étapes menant au point fixe.

CONJECTURE sur la persistance multiplicative (non démontrée à ce jour) :

La persistance multiplicative d'un nombre entier écrit dans le système décimal est inférieure ou égale à 11.

Les mathématiciens calent, les informaticiens s'« agitent ».

Ils obtiennent notamment le tableau des plus petits entiers N_0, de persistance pm donnée inférieure à 11

pm	N_0
0	0
1	10
2	25
3	39
4	77
5	679
6	6788
7	68889
8	2677889
9	26888999
10	3778888999
11	277777788888899

Le plus ancien document sur la persistance des nombres est un article écrit en 1973 par **Neil Sloane**, mathématicien anglo-américain, né en 1939. Il indique notamment qu'il n'existe aucun nombre jusqu'à 10^{50} de persistance supérieure à 11.

Dans des calculs plus avancés, **Mark Diamond**, mathématicien australien, montre en 2011 qu'aucun nombre inférieur à 10^{333} n'a une persistance supérieure à 11.

En mai 2013, **Francesco De Comité**, chercheur à l'université de Lille, dont la spécialité est la géométrie assistée par ordinateur et, l'Art et les mathématiques a poussé la vérification jusqu'à 10^{500}.

Et dans Wikipédia, il est écrit qu'il a été démontré qu'il n'existe pas de nombre inférieur à 10^{20585} de persistance supérieure à 11.

Mais à ce jour**, la conjecture n'est toujours pas devenue théorème**.

Variante de la persistance multiplicative de Paul Erdos, mathématicien hongrois né le 26.3.1913 à Budapest, mort le 20.9.1996 à Varsovie, Pologne.

Extrait de l'article de Jean-Paul Delahaye *Pour la Science* n°430 août 2013

4. La variante de Paul Erdős

D'après Richard Guy, le mathématicien hongrois Paul Erdős a lui-même proposé une intéressante et très simple variante du problème de la persistance multiplicative. Trouvant peut-être trop facile la conjecture (pourtant non résolue...) affirmant que la persistance multiplicative de tout nombre en base 10 est au plus 11, il a proposé que d'une étape à l'autre, on ne calcule que le produit des chiffres non nuls ; par exemple, 4570 → 140 → 4.

Cette « persistance à la Erdős » (toujours au moins égale à la persistance usuelle) est encore plus mal connue. W. Schneider a en effet découvert les nombres suivants qui ont une persistance à la Erdős supérieure à 11 :

(a) Le nombre $N = 5_{(16)}7_{(13)}$ (le 5 répété 16 fois, suivi du 7 répété 13 fois) a une persistance à la Erdős de 12 : 55 555 555 555 555 557 777 777 777 777 → 14 784 089 722 747 802 734 375 → 49 962 386 718 720 → 438 939 648 → 4 478 976 → 338 688 → 27648 → 2688 → 768 → 336 → 54 → 20 → 2.

(b) $7_{(42)}8_{(2)}9_{(14)}$ a une persistance à la Erdős de 13.

(c) $2_{(1)}6_{(1)}7_{(130)}9_{(8)}$ a une persistance à la Erdős égale à 14.

Wilfred Whiteside et Phil Carmody ont été jusqu'à 17 (voir www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_341.htm) :

(d) $6_{(1)}7_{(157)}8_{(46)}9_{(25)}$ a une persistance à la Erdős de 15.

(e) $3_{(1)}7_{(54)}8_{(82)}9_{(353)}$ a une persistance à la Erdős de 16.

(f) $3_{(1)}7_{(27)}8_{(622)}9_{(399)}$ a une persistance à la Erdős de 17.

Comment être certain qu'on ne trouvera pas mieux ? Et même, comment savoir qu'un maximum sera atteint ? Erdős n'a pas répondu, mais il a proposé la conjecture suivante : pour toute base de numération *b*, il existe une constante *p'*(*b*) donnant le maximum possible pour la persistance à la Erdős des nombres écrits dans cette base. Cette variante de la conjecture est plus ardue que l'énoncé initial. Il n'est d'ailleurs pas si probable que cela qu'elle soit vraie, puisque, aujourd'hui, nul ne semble avoir identifié ce maximum indépassable dont elle annonce l'existence, même dans le cas de la base 10 !

Et si on change de base ?

En base 2, il n'y a que des 0 et des 1 donc si l'écriture d'un nombre contient un zéro, la racine numérique multiplicative est égale à 0 et la persistance multiplicative est à 1.
Si l'écriture du nombre ne contient que des 1, la racine numérique multiplicative est égale à 1 et la persistance multiplicative est à 1.

En base 3, ça se complique. Je retiens que la conjecture d'une persistance multiplicative maximale n'est toujours pas prouvée.

Les personnes intéressées pourront consulter dans l'article de Jean-Paul Delahaye, des investigations sur des bases à taux variable.

Mais là encore, je ne retiens qu'**aucune *conjecture* de persistance multiplicative maximale, n'est démontrée.**

Notion de « **TRAIN DE PUISSANCES** »

Un autre processus itératif proposé par **John Conway** (1937 – 2020)

On distingue la parité de l'entier origine,

1er cas : N_0 possède un nombre pair de chiffres $N_0 = \sum_0^{2n+1} a_{0i}\, 10^i$

$N_0 = \sum_0^{2n+1} a_{0i}\, 10^i \;\rightarrow\; N_1 = \prod_0^n {a_{02i}}^{a_{02i+1}}$

2ème cas : N_0 possède un nombre impair de chiffres $N_0 = \sum_0^{2n} a_{0i}\, 10^i$

$N_0 = \sum_0^{2n} a_{0i}\, 10^i \;\rightarrow\; N_1 = \left(\prod_0^{n-1} {a_{02i}}^{a_{02i+1}}\right) a_{02n}$

Convention si nécessaire : $0^0 = 1$.

Le nom donné à ce processus est « train de puissances »

exemples :

$N_0 = 3462 \rightarrow N_1 = 3^4 6^2 = 2916 \rightarrow N_2 = 2^9 1^6 = 512 \rightarrow N_3 = 5^1 2 \rightarrow N_4 = 10 \rightarrow$
$N_5 = 1^0 = 1$

$N_0 = 62437 \rightarrow N_1 = 6^2 4^3 7 = 16128 \rightarrow N_2 = 1^6 1^2 8 = 8$

Des nombres *indestructibles* !

John Conway $2592 = 32 \times 81 = 2^5 9^2$

Neil Sloane $24547284284866560000000000 = 2^4 5^4 7^2 8^4 2^8 4^8 6^6 5^6 0^0 0^0 0^0 0^0 0^0$

Propos sur les démonstrations erronées

Des conjectures non démontrées déclenchent l'appétit des mathématiciens.

Retour sur une conjecture qui a résisté des siècles

Énoncé du grand théorème de Fermat, 1637

« Un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux puissances quatrièmes et plus généralement aucune puissance supérieure à deux n'est la somme de deux puissances analogues. »

(En revanche, il existe des carrés égaux à la somme de deux carrés. Tous les triplets pythagoriciens et bien d'autres :
$13^2 = 12^2 + 5^2$; $17^2 = 15^2 + 8^2$ etc.)

Pierre de Fermat d'ajouter « J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais la marge est trop étroite pour la contenir. »

Finalement le grand théorème de Fermat a été démontré par Andrew Wiles en 1995, plus de trois siècles plus tard. Cette « merveilleuse démonstration » a résisté longtemps et la démonstration n'est pas vraiment une « merveilleuse » démonstration, elle utilise une armada de théories mathématiques.

Conclusion

La persistance des nombres entiers : des sciences occultes aux « vraies » sciences, un terrain de jeu inépuisable.

Grandeur et Humilité de l’homo sapiens.